

# ANÁLISE DE SOBRE-SINAL E REAÇÃO REVERSA EM UM SISTEMA DE CONTROLE DE TERCEIRA ORDEM COM DOIS ZEROS REAIS DISTINTOS E UM PÓLO REAL DUPLO. Dário Monte Alegre, Célia Aparecida dos Reis, Márcio José Ferreira. – Matemática – Engenharia Mecânica – Departamento de Matemática – UNESP – Campus de Ilha Solteira.

Atualmente os sistemas de controle vêm possibilitando ao homem ultrapassar obstáculos que antes eram intransponíveis, como, por exemplo, enviar espaçonaves totalmente automáticas ao planeta Marte. O engenheiro de controle encontra aplicações para os sistemas de controle em sistemas modernos, complexos e interligados, como, por exemplo, sistemas de controle de tráfego, processos químicos e sistemas robóticos, tendo, o engenheiro, a oportunidade de controlar muitos dos sistemas úteis e interessantes ligados à automação industrial. A oportunidade de controlar máquinas, processos industriais e econômicos, para o benefício da sociedade, representa claramente uma das características de maior relevo para a engenharia de controle (Dorf, 2001, Ogata, 1998).

Existem alguns problemas como o de controle do eixo de máquinas ferramentas, os quais necessitam seguir uma trajetória pré-definida, nos quais a resposta a degrau não pode apresentar extremos. Desta forma, o estudo de condições que permitam avaliar extremos, sobre-sinal e reação reversa na resposta a degrau é de grande importância na teoria de controle de acordo com Ogata (1998), El-Khoury (1993), Howell (1997), Rachid (1995), Leon de la Barra (1994, 1994-a), Reis (2005), Vidyasagar (1986).

Neste trabalho será feita uma análise de pontos críticos, sobre-sinal e reação reversa em sistemas de controle lineares, estáveis, contínuos no tempo, de terceira ordem com dois zeros reais distintos e um pólo real de multiplicidade dois. Considere a função de transferência para o sistema de controle em questão, na forma de pólos e zeros, dada a seguir.

$$G(s) = -\frac{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2}{z_1 \cdot z_2} \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2)}{(s - \lambda_1)^2 \cdot (s - \lambda_2)} \quad (1)$$

sendo que:

- $z_i$ , para  $i = 1, 2$ , são os zeros de  $G(s)$ ;
- $\lambda_j$ , para  $j = 1, 2$ , são os pólos de  $G(s)$ ;
- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  e  $z_1 < z_2$ .

Para uma entrada a degrau unitário, calcula-se a resposta temporal para o sistema dado por (1), levando-se em conta a expansão em frações parciais deste quociente polinomial. O Lema a seguir fornece esse resultado.

**Lema 1:** A resposta a uma entrada a degrau unitário,  $y(t)$ , para o sistema de controle cuja função de transferência é dada por (1), é da forma:

$$y(t) = 1 + c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_1 t} + c_3 \cdot e^{\lambda_2 t} \quad (2)$$

sendo que:

- $c_1 = -1 + \frac{\lambda_1^2}{z_1 \cdot z_2} \cdot \frac{(\lambda_2 - z_1) \cdot (\lambda_2 - z_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}$ ;
- $c_2 = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{z_1 \cdot z_2} \cdot \frac{(\lambda_1 - z_1) \cdot (\lambda_1 - z_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}$ ;

$$\bullet \quad c_3 = -\frac{\lambda_1^2}{z_1 \cdot z_2} \cdot \frac{(\lambda_2 - z_1) \cdot (\lambda_2 - z_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}.$$

Para a análise que será feita a seguir, é conveniente a classificação dos zeros do sistema (1) em quatro diferentes classes, a saber:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{z : G(z) = 0, 0 < z < +\infty\} \\ M_2 &= \{z : G(z) = 0, \lambda_2 < z < 0\} \\ M_3 &= \{z : G(z) = 0, \lambda_1 < z < \lambda_2\} \\ M_4 &= \{z : G(z) = 0, -\infty < z < \lambda_1\}. \end{aligned}$$

A seguir apresentam-se os principais resultados obtidos para tal sistema, em termos de pontos críticos, sobre-sinal e reação reversa. Inicialmente, necessita-se de algumas considerações iniciais, as quais são apresentadas a seguir.

Para a análise de pontos críticos de  $y(t)$ , dada por (2), torna-se necessária a análise da derivada primeira dessa função. Assim, de (2), tem-se que  $y(t)$  apresenta pontos críticos se e somente se:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow c_2 \cdot \lambda_1 \cdot t \cdot e^{\lambda_1 t} + c_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_3 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = 0. \quad (3)$$

Dividindo-se (3) por  $e^{\lambda_1 t}$  e definindo-se  $\beta = \lambda_2 - \lambda_1 > 0$  tem-se:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow (c_1 \cdot \lambda_1 + c_2) + c_2 \cdot \lambda_1 \cdot t + c_3 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\beta t} = 0. \quad (4)$$

Em (4) defina uma função  $f(t)$  dada por:

$$f(t) = (c_1 \cdot \lambda_1 + c_2) + c_2 \cdot \lambda_1 \cdot t + c_3 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\beta t}. \quad (5)$$

A partir de (4) e (5), nota-se que  $y'(t)$  e  $f(t)$  se relacionam da seguinte forma:

$$f(t) = \frac{y'(t)}{e^{\beta t}} \quad (6)$$

A partir de (6), observa-se que os pontos críticos de  $y(t)$  são os pontos  $t_0 \in (0, +\infty)$  tais que  $f(t_0) = 0$ . Assim, para a análise dos pontos críticos de  $y(t)$ , faz-se uso da análise das raízes de  $f(t)$ . Além disso,  $f(t)$  tem o mesmo sinal da derivada de  $y(t)$ , já que o coeficiente  $e^{\beta t}$  é sempre positivo. Assim,  $f(t)$  é utilizada para classificar os pontos críticos de  $y(t)$ .

Nota-se que através da análise direta de  $y'(t)$ , a obtenção de condições para a ocorrência de pontos críticos e, conseqüentemente sobre-sinal e reação reversa é, na maioria dos casos, impossível, uma vez que  $y(t)$  é uma soma de exponenciais. Sendo assim, buscam-se caminhos alternativos, mediante a definição da função auxiliar dada em (5), obtida a partir da derivada de  $y(t)$ . A análise dos pontos críticos é transferida para a análise dos zeros de tal função auxiliar e do seu gráfico.

Nota-se que esta técnica tem se mostrado bastante eficiente, quando utilizada na análise de sistemas mais gerais (Reis, 2006, 2005).

A seguir, mostram-se os resultados obtidos, mediante a aplicação de uma tal técnica, para a classe de sistemas de controles lineares (1).

**Teorema 1:** Têm-se os seguintes resultados para  $\eta$ , o número de extremos de  $y(t)$ :

1.  $\eta = 0$  se e somente se  $z_1, z_2 \in M_4$  ou  $z_1 \in M_4$  e  $z_2 \in M_3$ ;
2.  $\eta = 1$  se e somente se  $z_1 \in M_4$  e  $z_2 \in M_2$  ou  $z_1 \in M_4$  e  $z_2 \in M_1$  ou  $z_1 \in M_3$  e  $z_2 \in M_2$  ou  $z_1 \in M_3$  e  $z_2 \in M_1$ ;

3.  $\eta = 2$  se e somente se  $z_1, z_2 \in M_3$  ou  $z_1, z_2 \in M_2$  ou  $z_1 \in M_2$  e  $z_2 \in M_1$  ou  $z_1, z_2 \in M_1$ .

**Teorema 2:** Se  $y(t)$  é a resposta a degrau unitário para o sistema (1), então:

1.  $y(t)$  pode apresentar sobre-sinal se e somente se  $z_1 \in M_4$  e  $z_2 \in M_2$  ou  $z_1 \in M_3$  e  $z_2 \in M_2$  ou  $z_1, z_2 \in M_3$  ou  $z_1, z_2 \in M_2$  ou  $z_1 \in M_2$  e  $z_2 \in M_1$  ou  $z_1, z_2 \in M_1$ ;
2.  $y(t)$  apresenta reação reversa inicial se e somente se  $z_1 \in M_4$  e  $z_2 \in M_1$  ou  $z_1 \in M_3$  e  $z_2 \in M_1$  ou  $z_1 \in M_2$  e  $z_2 \in M_1$ ;
3.  $y(t)$  pode apresentar reação reversa do tipo  $r_u$  estendido se e somente se  $z_1, z_2 \in M_3$  ou  $z_1, z_2 \in M_2$  ou  $z_1, z_2 \in M_1$ .

**Corolário:** Se  $z_1, z_2 \in M_4$  ou  $z_1 \in M_4$  e  $z_2 \in M_3$  então  $y(t)$  não apresenta nem sobre-sinal nem reação reversa.

A seguir, apresenta-se um exemplo que ilustra parte dos resultados obtidos.

**Exemplo:** Considere  $G(s)$  dada por:

$$G(s) = \frac{\left(-\frac{s}{0,5} + 1\right) \cdot (-s + 1)}{\left(\frac{s}{5} + 1\right)^2 \cdot \left(\frac{s}{2} + 1\right)}, \quad (7)$$

$G(s)$  possui zeros  $z_1 = 0,5$  e  $z_2 = 1$  e pólos  $\lambda_1 = -5$  e  $\lambda_2 = -2$ . Como  $z_1, z_2 \in M_1$ , pelo Teorema 2,  $y(t)$  pode apresentar sobre-sinal e reação reversa do tipo  $r_u$  estendido. A Figura 1-a, a seguir, mostra o gráfico da resposta a uma entrada degrau unitário, deste sistema. Nota-se a ocorrência, tanto do sobre-sinal quanto da reação reversa.

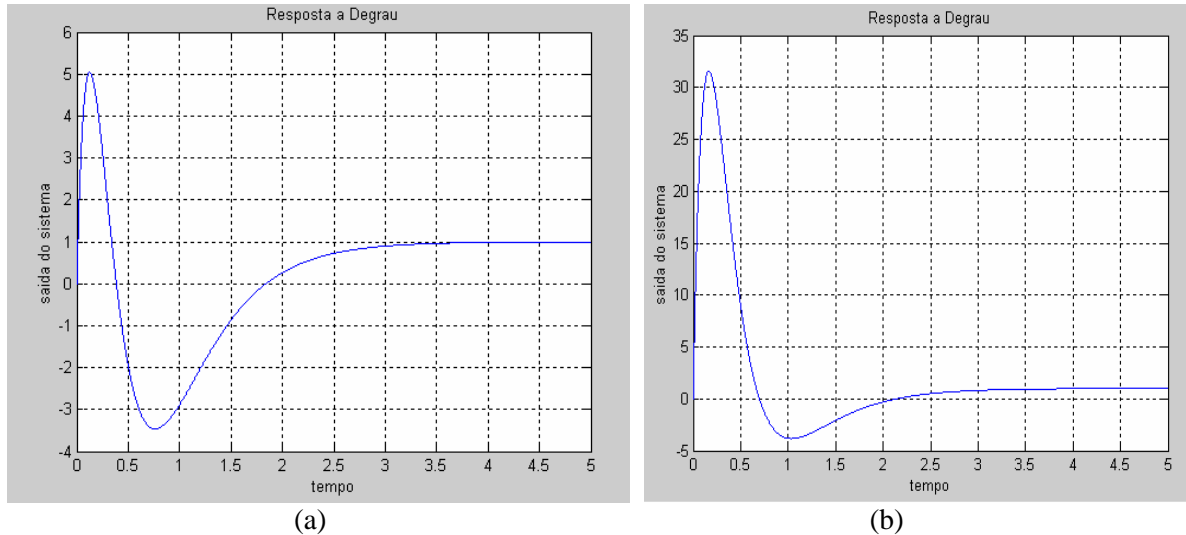


Figura 1 – Resposta a Degrau Unitário para  $G(s)$  dada por (7).

A Figura 1-b, mostra o gráfico de  $y(t)$  quando  $z_1 = -0,5$ ,  $z_2 = -0,2$ . Como  $z_1, z_2 \in M_2$ , nota-se a ocorrência de sobre-sinal e reação reversa do tipo  $r_u$  estendido, conforme o Teorema 2.

A importância deste resultado, é a associação da ocorrência de reação reversa a zeros reais negativos. Na literatura tal resultado aparece associado apenas a zeros localizados no semiplano aberto direito do plano da variável de Laplace.

Um outro fato a ser destacado é a ocorrência de sobre-sinal associado a zeros localizados no semi-plano direito, como é o caso da Figura 1.

Foram obtidas condições necessárias e suficientes para a ocorrência de extremos, sobre-sinal e reação reversa em sistemas de controle lineares contínuos no tempo de terceira ordem com um pólo duplo e dois zeros reais distintos. Além disso, provou-se que o sobre-sinal também está associado a sistemas que possuam zeros no semi-plano aberto direito. Também foi provado que a ocorrência de reação reversa também está associada a sistemas que possuam zeros no semi-plano aberto esquerdo. Tais resultados são importantes porque os resultados presentes na literatura não apresentam tais resultados, já que a reação reversa está sempre associada a zeros positivos e o sobre-sinal a zeros negativos. Também foi verificada a eficácia de uma técnica de análise de pontos críticos em uma tal classe de sistemas de controle, a qual está fundamentada na transferência da análise de pontos críticos da resposta a degrau, a determinação de raízes de uma função auxiliar definida a partir da derivada de  $y(t)$ .

Acredita-se que, com os resultados obtidos, foi dado um passo importante para um melhor entendimento da influência das posições relativas de pólos e zeros para a ocorrência de pontos críticos e extremos, para a análise e determinação de sobre-sinal e reação reversa.

Observa-se que os resultados obtidos podem ter várias aplicações em engenharia de controle e podem, por exemplo, ser usados em projetos de controladores sem sobre-sinal e reação reversa, para a resposta a degrau de malha fechada de um sistema linear de fase mínima.

### Referências Bibliográficas

- [1] Dorf R. C. & Bishop R. H. (2001). *Sistemas de Controle Moderno*, 8 ed. LTC Editora, Rio de Janeiro, R.J..
- [2] El-Khoury, M. et all. (1993). Influence of Zero Locations on the Number of Step-response Extrema. *Automatica*, vol. 29, no 6, pp. 1571-1574.
- [3] Howell, J. R. (1997). Some classes of Step-response Model Without Extrema. *Automatica*, vol. 33, no 7, p. 1427 - 1428.
- [4] León de la Barra, B.A. (1994). On reação reversa in SISO systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 39, no 3, pp. 578-581.
- [5] Ogata, K. (1998) *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro.
- [6] Rachid, A. (1995). Some conditions on zeros to avoid step-response extrema. *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 40, no 8, pp. 1501-1503.
- [7] Reis, C. A., Monte Alegre, D., Ferreira, M. J., Silva, N. A. P. Análise de Sobre-Sinal e Reação Reversa em Sistemas de Controle Lineares, Contínuos no Tempo, de Terceira Ordem com Um Zero e Um Pólo, Ambos Reais e de Multiplicidade Dois. *Anais do DINCON 2006, 5º Congresso Temático de Aplicações de Dinâmica e Controle da SBMAC*, Guaratinguetá, S.P.
- [8] Reis, C. A., Messaoudi, A., Silva, N. A. P. (2005). O sobre-sinal e a resposta inversa em sistemas de controle lineares contínuos no tempo. *SBA Controle & Automação*, Jan./Mar. 2005, vol. 16, no. 1, p. 60-69. ISSN 0103-1759.
- [9] Reis, C. A., Silva, N. A. P., Monte Alegre, D. (2005 - a) Determinação de Sobre-Sinal e Reação Reversa em Sistemas de Controle Lineares Estáveis e Contínuos de Terceira Ordem Com Pólos Distintos e Um Zero Real Duplo. *Anais do DINCON 2005, 4º Congresso Temático de Aplicações de Dinâmica e Controle da SBMAC*, Bauru, S.P..
- [10] Vidyasagar, M. (1986). On Reação reversa and Nonminimum Phase Zeros. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-31, nº 5, pp. 440.

**Bolsa: FAPESP**